Наглядность как средство формирования системности знаний учащихся

Очевидно то, что очам видно.

Человеческий мозг перерабатывает информацию двумя сигнальными системами: доречевой (общей у человека и животных) и посредством слов и речи.

Всякая мысль, прежде чем обрести словесное оформление, проходит через этапы первой сигнальной системы. Установлено, что переработка информации начинается еще до поступления в мозг. Например, селекция зрительной информации начинается уже в сетчатке глаза. Кроме того, мозг человека перерабатывает информацию этажной системой кодов: код звуков и знаков → код слов → код фраз → код смысла. Поэтому, встретившись со случаем непонимания учащимися изучаемого материала, мы всячески пытаемся упростить объяснение. И нередко понимание сути наступает с восприятием удачной формы записи или иллюстрации, т.е. сразу на низшем уровне, до перекодировки в слова. Например, сравним записи:

2*3=6	2	*3=6
2*4=8		*4=8
2*5=10		*5=10
2*6=12		*6=12

Успешность обучения обеспечивается разгрузкой «перегруженных» верхних уровней и догрузкой «недогруженных» нижних. В математике трудно назвать раздел, при изучении которого нельзя было бы улучшить информационные детали низших уровней. В идеале математические иллюстрации (рисунки, схемы, символы, графики и т.п.) должны быть осмысленной цветной картинкой. При этом важно следить за тем, чтобы наглядность не была излишней или неполной.

Например:

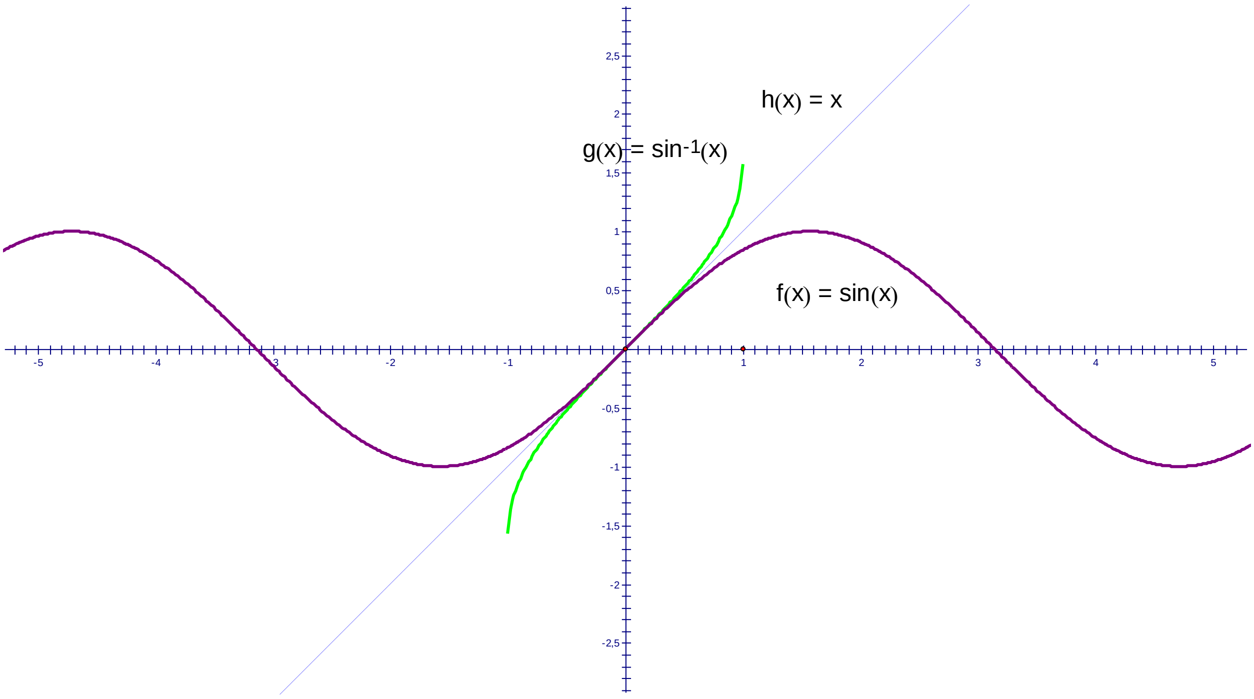
1. Три медианы треугольника ABC логично обозначать AA_1, BB_1, CC_1, т.к. индексы автоматически указывают на взаимное соответствие элементов записи.
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

   $a^n : a^m = a^{n-m}$
3. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

В примерах 2 и 3 использовано противопоставление.

Есть смысл смелее использовать сдвоенные правила, формулы, графики, т.к. зрительное восприятие пары графиков или пары формул – толчок к последующей серии противопоставлений вплоть до высшего кода.

4. Сравнивая графики взаимно обратных функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$ внимательным зрительным анализом, можно получить много важных соответствий.



$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

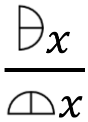
$$\Downarrow$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

5. Полезно использовать свернутые формы сходных или контрастных суждений:
   a. Если при увеличении значения одной величины в несколько раз значение другой $\frac{\text{увеличивается}}{\text{уменьшается}}$ во столько же раз, то эти величины называются $\frac{\text{прямо}}{\text{обратно}}$ пропорциональными.
   b. График $\frac{\text{показательной}}{\text{логарифмической}}$ функции располагается $\frac{\text{выше оси абсцисс}}{\text{правее оси ординат}}$.
6. Льюис Кэрролл предлагал синус и косинус не записывать тремя буквами, а обозначать специальными знаками – соответственно ориентированными полукругами: проекция окружности, дающая значения синуса, перемещается по вертикальной оси, а проекция окружности, дающая

значения косинуса, перемещается по горизонтальной оси.

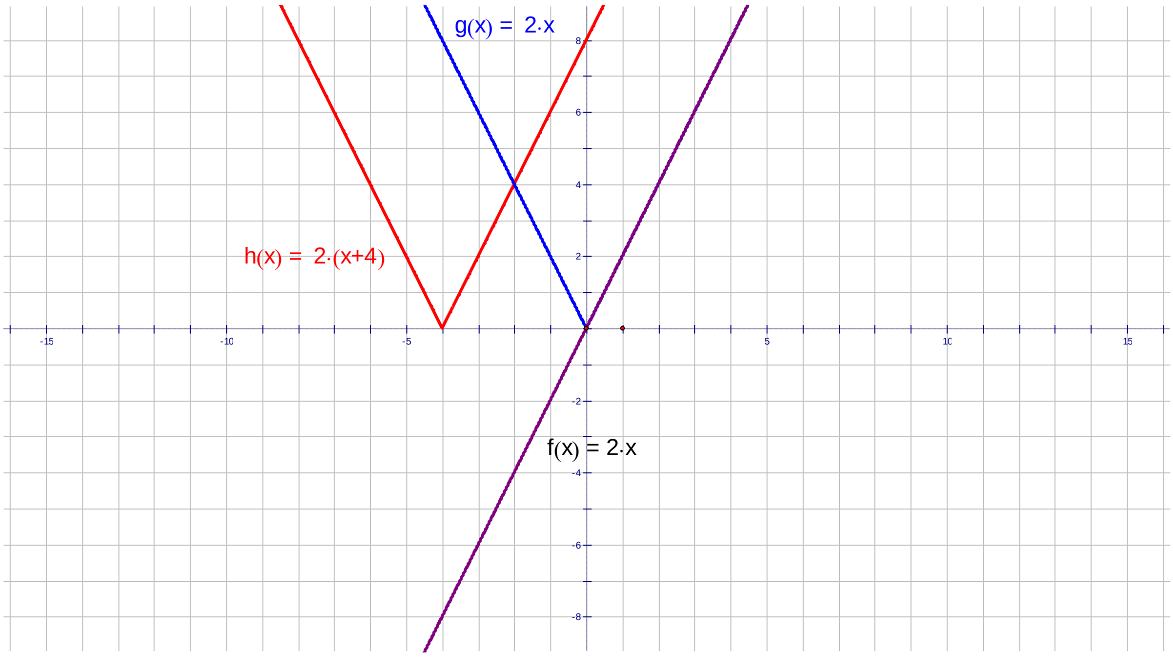
$$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



7. Неудобно для многократной записи рукой и изображение вектора стрелкой, которое требует четырех движений пера. Не лучше ли условиться вектор обозначать просто чертой, поставленной над буквой?

$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ $\qquad \overline{a}$

8. В одной и той же системе координат разумно выполнять построение графиков семейства усложняющихся функций:



Исключительно важно устранять неудачные обозначения, т.к. они приводят к неверным связям в мышлении. Подсознание работает так: обозначения разные, следовательно, различные понятия; обозначения совпадают, следовательно, понятия тождественны. На эти «мелочи» нельзя не обращать внимания. Например, нуль-число обозначаем 0, а нуль-вектор обозначаем $\overline{0}$. Тогда не будет путаницы при умножении:

$$0 * a = 0$$
$$\overline{0} * a = \overline{0}$$
$$0 * \overline{a} = \overline{0}$$
$$\overline{0} * \overline{a} = 0$$

Так как мышление учащегося опирается на видение, то часто удобно использовать аббревиатуры. Например, чтобы добиться абсолютного различения трех признаков равенства/подобия треугольников, обозначим каждый признак аббревиатурами слов «сторона» (С) и «угол» (У), причем уместно воспользоваться ассоциативным родством номера признака с числом сторон треугольника.

Номер признака	1	2	3
равенства треугольников	УСУ	СУС	ССС
подобия треугольников	УУ	СУС	ССС

В символической записи важно добиваться наибольшей наглядности. Сравните две записи:

$(a > c) \leftrightarrow (ab > cb)$, $b > 0$ и

$$\begin{array}{ccc} a & > & c \\ \downarrow & b>0 & \uparrow \\ ab & > & cb \end{array}$$

Вторая запись по сравнению с первой имеет несколько преимуществ:

1. В первой 16 знаков, во второй 13 знаков;
2. Первое записано в строчку, второе – компактно, поэтому легче воспринимается сетчаткой глаза;
3. Второе обладает симметрией в записи (информация считывается не только по строкам, но и по столбцам);
4. Раздвоение знака равносильности во второй записи непосредственно указывает на наличие двух теорем (две противоположно направленные стрелки информативнее одной двусторонней стрелки).

Лучшему усвоению также благоприятствует расположение связанных утверждений в двух параллельных столбцах, друг против друга. То, что зрительно располагается рядом, легче противопоставить и связать логически, словесно.

Рассмотрим две взаимно обратные теоремы.

Свойство параллелограмма	**Признак параллелограмма**
Если четырехугольник является параллелограммом, то его противоположные углы равны.	Если в четырехугольнике противоположные углы равны, то он является параллелограммом.
<u>Прямая теорема</u>	*<u>Обратная теорема</u>*
Дано: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$	Дано: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
Доказать: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$	Доказать: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$

Может здесь выгодно перейти к еще более емкой, насыщенной совместной записи обеих теорем:

$$\begin{pmatrix} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD \end{pmatrix} \rightleftarrows \begin{pmatrix} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{pmatrix}$$

Считаю, что вообще есть смысл записывать прямые и обратные теоремы и задачи рядом на одном листе.

При первой встрече с противоположными правилами ученик ищет опору в сигнальных подкреплениях смысловых связей. Так, затрудняясь сформулировать правила умножения и деления дробей, ученик говорит: «Умножить – так (производит рукой два параллельных горизонтальных движения), разделить – так (производит рукой в воздухе два движения крест-накрест).

$$\frac{7}{8} * \frac{2}{31} = \frac{7 * 2}{8 * 31}$$

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{31} = \frac{7 * 31}{8 * 2}$$

Изучив теорему Пифагора и соответствующие формулы для косоугольных треугольников, хорошо свести эти теоремы к триединой емкой записи:

$$\angle \mathrm{C} \underset{<}{\overset{>}{=}} 90^0 \ \rightarrow \ c^2 \underset{<}{\overset{>}{=}} a^2 + b^2$$

При такой записи в одной формуле отражены шесть теорем.

Замена записей даже традиционных теорем, формуле и т.п. более удобными для восприятия дает заметное улучшение полноты представления, способствует формированию системности знаний.

Рассмотрим еще один пример. Обычно теорему синусов записывают так:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Но ведь лишь совместное рассмотрение треугольника и описанной около него окружности способствовало возникновению тригонометрии:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Однако и эта запись не обладает предельной наглядностью. Более информативно следующее оформление этого соотношения:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2R * \begin{pmatrix} \sin A \\ \sin B \\ \sin C \end{pmatrix}$$

Иногда полезно объединять в одной записи тематически не связанные суждения. Например:

1. $a \| b; b \| c \ \rightarrow a \| c$
2. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
3. $\frac{3}{5} * \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$
4. $\log_a b * \log_b c = \log_a c$

Что же в этих правилах общего? В них нет совпадающих тематических моментов, но общих «механический» легко угадывается: в результате каждой операции средний (повторяющийся) элемент выпадает.

Часто при изучении нового правила полезно указывать на наличие внешней аналогии с каким-нибудь правилом изученным ранее.

Вывод: использование при подаче математической информации двух кодов, словесного и визуального (рисунок), нацеленного на предельную наглядность изучаемого материала, направлено на лучшее усвоение изучаемого объекта учащимися. Хороший урок математики не только и не столько рассказывается, а запечатлевается в памяти ребенка цветной картинкой, показанной на доске или экране и перенесенной ребенком в свою тетрадь. Эта картинка заставляет активнее работать правое полушарие мозге, корректировать логико-знаковый код, формируемый левым полушарием.